III. De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque summandis Terminis quarumdam Serierum æquali Intervallo a se distantibus. Auctore *Abrahamo de Moivre*, S. R. Socio.

Eruditissimo Viro *JOHANNI MACHIN*, Societatis Regalis Secretario, *A. de Moivre*, S. P.

MITTO tibi excerpta quædam e Chartis meis coram Regali Societate 5° *Maii* 1720, *exhibitis, quibus eodem die manum apposuerunt Secretarii. Pars altera harum Chartarum jam per biennium apud Cl. Præsidem reposita fuerat; continebat autem Demonstrationes Propositionum quarumdam in Libro a me Anglice emisso qui inscriptus est*, THE DOCTRINE OF CHANCES. *Pars altera continebat explanationem uberiorem Demonstrationum quas prior levius tetigerat. Jam cum sæpius me instigasti ut selectas Propositiones quasdam ex his Chartis desumptas publici juris facerem, utpote existimans in illis quædam reperiri quæ ad res majoris momenti quam sit speculatio ludorum applicari possint; huic tuo desiderio tandem obtempero, idque eo libentius, quo mihi videor jure aliquo a Te itidem impetrare posse ut pulcherrima tua inventa in Publicum proferre diutius non relucteris.* Vale.

2 August
1722.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si sit Fractio qualibet $\frac{1}{1 - ex + fxx - gx^3 \text{ \&c.}}$, *cujus Numerator sit data Quantitas, & Denominator sit Multinomium utcunque compositum ex datis,* 1, e, f, g, &c. *& indeterminata* x, *dico Fractionem supradictam ad Fractiones simpliciores reducibilem fore.*

Casus Primus.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1 - ex + fxx}$; finge Denominatorem $1 - ex + fxx = o$, sintque $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{p}$ radices istius Æquationis, sive facto $xx - ex + f = o$, sint m, p, radices Æquationis novæ, fac $A = \frac{m}{m - p}$, atque $B = \frac{p}{p - m}$, & erit Fractio proposita æqualis summæ $\frac{A}{1 - mx} + \frac{B}{1 - px}$.

Casus Secundus.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1 - ex + fxx - gx^3}$; fingatur $x^3 - exx + fx - g = o$, sintque m, p, q, radices istius Æquationis, pone $A = \frac{mm}{\overline{m - p} \times \overline{m - q}}$,

B =

$B = \dfrac{pp}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}}$, $C = \dfrac{qq}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}}$; & erit Fractio proposita æqualis summæ $\dfrac{A}{1-mx} + \dfrac{B}{1-px} + \dfrac{C}{1-qx}$.

Casus Tertius.

Sit Fractio proposita $\dfrac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4}$. Fingatur $x^4 - ex^3 + fxx - gx + h = o$, sintque m, p, q, s, Radices istius Æquationes, pone $A = \dfrac{m^3}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{m-s}}$, $B = \dfrac{p^3}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{p-s}}$, $C = \dfrac{q^3}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}}$, $D = \dfrac{s^3}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}}$, eritque Fractio proposita æqualis summæ $\dfrac{A}{1-mx} + \dfrac{B}{1-px} + \dfrac{C}{1-qx} + \dfrac{D}{1-sx}$.

Casus Quartus.

Sit Fractio proposita $\dfrac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4-kx^5}$, fingatur $x^5 - ex^4 + fx^3 - gxx + hx - k = o$, sintque m, p, q, s, t, Radices istius æquationis; pone $A =$

$\frac{}{\times\overline{p-s}\times\overline{p-t}}$, $C = \frac{q^4}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{q-s}\times\overline{q-t}}$, $D = \frac{s^4}{\overline{s-m}\times\overline{s-p}\times\overline{s-q}\times\overline{s-t}}$, $E = \frac{}{\overline{t-m}}$

$\frac{t^4}{\times\overline{t-p}\times\overline{t-q}\times\overline{t-s}}$. Eritque Fractio proposita æqualis summæ, $\frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx} + \frac{D}{1-sx} + \frac{E}{1-sx}$. Lex Reductionis ita uno intuitu se prodit, tamque facilis est illius continuatio ut inutile foret illam verbis explanare.

Corollarium I.

Si Radices omnes sint æquales, non poterit Fractio proposita reduci ad simpliciores.

Corollarium II.

Si Radices aliquæ sint æquales, aliæ vero inæquales, poterit reduci fractio proposita ad simpliciores; sit *v.g.* fractio proposita $\frac{1}{1-ex+fxx-gx^3}$, factoque ut præscriptum est $x^3 - exx + fx - g = 0$. Sint Radices istius æquationis m, p, q, quarum m & p sint æquales: erunt fractiones simplices in quas resolvitur proposita $\frac{mm}{\overline{m-p}\times\overline{m-q}\times\overline{1-mx}} + \frac{pp}{\overline{p-m}\times\overline{p-q}\times\overline{1-px}} + \frac{qq}{\overline{q-m}\times\overline{q-p}\times\overline{1-qx}}$; addantur duæ priores in unam summam, & erit summa

(divisis

(divisis Numeratore & Denominatore per $m-p$)

$$\frac{\overline{mp-q\times\overline{m+p}+mpqx}}{\overline{m-q}\times\overline{p-q}+\overline{1-mx}\times\overline{1-px}},\ \text{sive}$$

$$\frac{mm-2qm+mmqx}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-mx}|^2},\ \text{sive}\ \frac{m}{\overline{m-q}\times\overline{1-mx}|^2}$$

$$-\frac{qm}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-mx}|^2}$$ adeoque Fractiones reductæ erunt

$$\frac{m}{\overline{m-q}\times\overline{1-mx}|^2}-\frac{qm}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-mx}|^2}$$

$$+\frac{qq}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-qx}}.$$

Corollarium III.

Si Fractiones simplices in quas resolvitur Fractio proposita involvant Quantitates imaginarias, tunc quicquid est imaginarii semper destruetur per additionem duarum vel plurium fractionum numero pari sumptarum.

Corollarium IV.

Ex combinatione Fractionum simplicium, & apta limitatione Radicum, plurima suborientur Theoremata in quibus inerit concinnitas quædam minime aspernanda Ex. *g*. sit fractio proposita $\frac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4}$, factoque ut antea $x^4-ex^3+fxx-gx+h=0$. Sint $m, p, q, s,$ Radices Æquationis, sintque Fractiones in quas resolvitur proposita, $\frac{A}{1-mx}+\frac{B}{1-px}$

+

$+\frac{C}{1-qx}+\frac{D}{1-sx}$. Ponatur $q=-m$, atque $s=-p$; addantur ſimul duæ priores, itemque duæ poſteriores, & reducetur fractio propoſita ad $\frac{m+p-mpx}{2\times\overline{m+p}\times\overline{1-mx}\times\overline{1-px}}+\frac{m+p+mpx}{2\times\overline{m+p}\times\overline{1+mx}\times\overline{1+px}}$ ſi vero ponatur $p=-m$, atque $s=-q$, & addantur duæ priores, itemque duæ poſteriores, reducetur Fractio propoſita ad $\frac{mm}{\overline{mm-qq}\times\overline{1-mmxx}}+\frac{qq}{\overline{qq-mm}\times\overline{1-qqxx}}$.

PROPOSITIO II.

Si ſit Fractio quælibet cujus Numerator ſit data Quantitas, & Denominator ſit Trinomium vel Quadrinomium vel Quinquinomium, &c. *radicalitate non affectum & utcunque compoſitum ex datis*, 1, e, f, g, h, &c. *& indeterminata* x *atque dividator Numerator per Denominatorem, ut habeatur Series Infinita; dico fore ut, ſi ſumantur Termini quilibet iſtius ſeriei æqualibus intervallis a ſe invicem diſtantibus, ſeries infinitæ inde reſultantes, ſummabiles futuræ ſint.*

Exemplum I.

Sit Fractio propoſita $\frac{1}{1-x-xx}$; reducatur illa ad ad ſeriem infinitam, nempe ad $1 + x + 2xx + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8$ &c. ſumanturque termini omnes alterni, incipiendo a primo, itidemque ſumantur Termini omnes alterni, incipiendo a ſecundo, hincque conficiantur ſeries binæ,

Videlicet, $1 + 2xx + 5x^4 + 13x^6 + 34x^8$ &c.
$x + 3x^3 + 8x^5 + 21x^7 + 55x^9$ &c.

Fingatur Denominator Fractionis propoſitæ, $1 - x - xx = 0$, jam cum indices poteſtatum indeterminatæ x, in novis ſeriebus ſe invicem ſuperent communi differentia 2, pone $xx = z$, atque ope duarum æquationum $1 - x - xx = 0$, & $xx = z$, extermineturx x; fietque $1 - 3z + zz = 0$; jam nunc reſtituatur x, & erit $1 - 3xx + x^4 = 0$; dividatur hæc æquatio per primam, quotiens erit $1 + x - xx$; ſumantur alternatim Termini quotientis, propter Terminos alternatim ſumptos in ſerie propoſita, hincque orientur ſummæ duæ, $1 - xx$, & x; conſtituantur hæ ſummæ Numeratores Fractionum duarum quarum communis Denominator ſit $1 - 3xx + x^4$, eruntque $\frac{1 - xx}{1 - 3xx + x^4}$ & $\frac{x}{1 - 3xx + x^4}$ ſummæ reſpectivæ novarum Serierum.

Exemplum II.

Si vero deſiderentur ſummæ terminorum intervallis binis a ſe diſtantium, fiat ut prius $1 - x - xx = 0$, jam cum indices poteſtatum in novis ſeriebus ſe invicem ſuperunt communi differentia 3, ponatur $x^3 = z$, & fiet $1 - 4z - zz = 0$, atque reſtituto x, fiet $1 - 4x^3 - x^6 = 0$; dividatur $1 - 4x^3 - x^6$ per $1 - x - xx$, quotiens erit $1 + x + 2xx - x^3 + x^4$, cujus termini ordinatim ſumpti ad intervalla bina, tres

conficient

conficient ſummas, videlicet, $1 - x^3$, $x + x^4$, $2xx$, quæ ſigillatim ſumptæ, erunt illæ Numeratores, trium Fractionum, quibus ſi apponatur communis Denominator $1 - 4x^3 - x^6$, erunt tres Fractiones, $\frac{1 - x^3}{1 - 4x^3 - x^6}$, $\frac{x + x^4}{1 - 4x^3 - x^6}$, $\frac{2xx}{1 - 4x^3 - x^6}$, ſummæ tres Terminorum omnium binis intervallis a ſe diſtantium, incipiendo reſpective a primo, ſecundo & tertio Termino; atque eodem methodo colligere licet ſummas terminorum ternis vel quaternis vel quinis intervallis a ſe diſtantibus, ſive denominator ſit quadrinomium, vel multinomium quodcunque ex terminis finitis compoſitum.

PROPOSITIO III.

Si dividatur Unitas per Trinomium utcunque compoſitum ex datis 1, e, f, g, &c. *& indeterminata* x; *dico Terminum quemvis Seriei ex hac diviſione reſultantis, aſſignabilem fore.*

Sit Trinomium $1 - ex + fxx$ finge $xx - ex + f = 0$, ſint m & p, radices Æquationis; ſit $l + 1$ locus termini deſiderati, hoc eſt exprimat l intervallum inter primum Terminum & Terminum quæſitum, fac $A = \frac{m}{m - p}$, $B = \frac{p}{p - m}$. Et erit Terminus deſideratus $\overline{Am^l + Bp^l} \times x^l$.

Eodem modo ſi dividatur Unitas per quadrinomium $1 - ex + fxx - gx^3$, pone $x^3 - exx + fx - g = 0$, ſintque m, p, q, radices Æquationis, fac $A = \frac{mm}{\overline{m - p} \times \overline{m - q}}$, $B = \frac{pp}{\overline{p - m} \times \overline{p - q}}$, $C =$

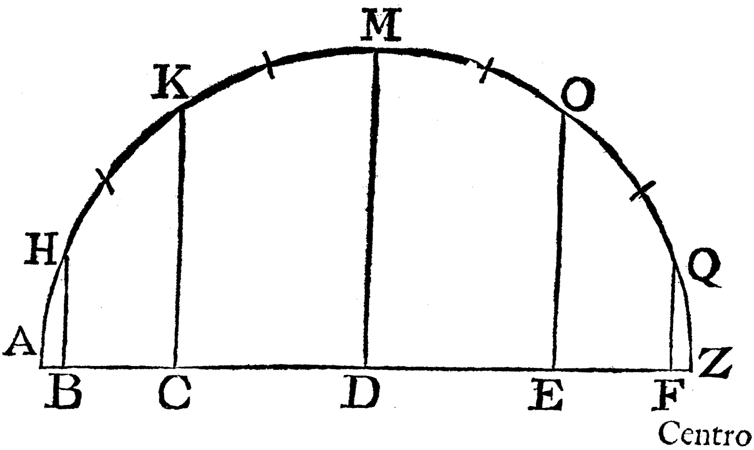
$\frac{qq}{\overline{q-m} \times \overline{q-p}}$. Et erit Terminus desideratus $\overline{Am^l + Bp^l + Cq^l} \times x^l$, & lex eadem obtinet pro multinomiis quibuscunque.

P R O B L E M A.

A & B *quorum Dexteritates sint in ratione data videlicet ut* a *ad* b, *ea conditione ludant, ut quoties* A *ludum unum vicerit,* B *tradat ipsi nummum unum: quoties vero* B *vicerit,* A *tradat ipsi nummum unum: & non prius ludo desistant, quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit; quæritur quantum probabile futurum sit ut certamen intra datum ludorum numerum* x, *vel expirante illo numero, finiatur.*

Casus Primus.

Sit n numerus nummorum quos uterque Collusorum habeat; sit etiam n numerus par, ponaturque a ad b habere rationem æqualitatis.



Centro D, Intervallo $DA = 1$, defcribatur Semicircumferentia AMZ quæ dividatur in tot partes æquales quot funt unitates in n, tunc ex primo H, tertio K, quinto M &c. & impari quoque divifionis termino, demittantur ad diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF &c. ponatur $Q = \frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{CK^{x+1}}{AC^{\frac{1}{2}x+1}}$ $+ \frac{DM^{x+1}}{AD^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{EO^{x+1}}{AE^{\frac{1}{2}x+1}} + \frac{QF^{x+1}}{AF^{\frac{1}{2}x+1}}$ &c. donec finus omnes exhauriantur: quo facto, erit probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam x, ad probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{1}{2}x-1}n - Q$ ad Q, accurate.

Corollarium I.

Si fumatur pro Q Terminus primus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio fufficiens nifi forte fit x numerus valde exiguus.

Exemplum.

Sit n numerus nummorum quos uterque Colluforum habeat $= 10$. Sit etiam $x = 76$. Si fumatur pro Q primus terminus & negligantur cæteri, invenietur probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam 76 ad probabilitatem non finiendi ut 50747 ad 49235, fi vero fumatur pro Q termini duo priores neglectis cæteris, invenietur ratio probabilitatum ut 50743 ad 49247.

Coroll-

Corollarium II.

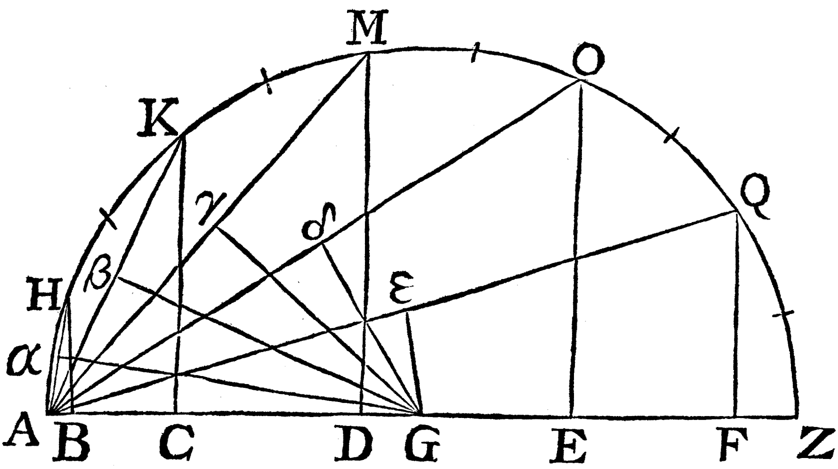
Invenire quotenis ludis, probabilitates certaminis finiendi & non finiendi erunt æquales.

Solutio.

Ponatur pro Q Terminus unicus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$, fiatque $2^{\frac{1}{2}x-1}n - Q = Q$. Et posito n maximo numero invenietur, $x = 0.756\,nn$ proxime, aliquanto major quam $\frac{3}{4}nn$.

Casus Secundus.

Sit n numerus impar, ponaturque a ad b habere rationem æqualitatis.



Centro G, intervallo GA describatur semicircumferentia AMZ quæ dividatur in tot partes æquales, quot sunt

ſunt unitates in n; tunc ex primo H, tertio K, quinto M, & impari quoque diviſionis termino, demittantur ad diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF &c. ex diametri extremitate A, primo ſcilicet arcui contermina, ducantur ſubtenſæ AH, AK, AM, &c. ad quas e Centro G ducantur perpendicula $G\alpha$, $G\beta$, $G\gamma$, $G\delta$, $G\varepsilon$, &c. ponatur $Q = \frac{BH^x \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}}$ $- \frac{CK^x \times G\beta}{AC^{\frac{x+1}{2}}} + \frac{DM^x \times G\gamma}{AD^{\frac{x+1}{2}}} - \frac{EO^x \times G\delta}{AE^{\frac{x+1}{2}}} + \frac{FQ^x \times G\varepsilon}{AF^{\frac{x+1}{2}}}$ &c. quo facto, erit probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam x, ad probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{x-3}{2}} n - Q$ ad Q accurate.

Corollarium I.

Si ſumatur pro Q terminus primus $\frac{HB^x \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio ſufficiens.

Exemplum.

Sit n numerus nummorum quos uterque Colluſorum habeat $= 45$. Sit etiam $x = 1519$. Sumatur pro Q terminus primus neglectis cæteris, & invenietur probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam 1519 ad probabilitatem non finiendi ut 49959 ad 50441, quæ proportio eſt vero proxima.

Corol-

Corollarium II.

Invenire quotenis ludis probabilitates certaminis finiendi & non finiendi erunt æquales.

Solutio.

Ponatur pro Q Terminus unicus $\frac{HB^x \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}}$, fiatque $2^{\frac{x-3}{2}} n - Q = Q$; & posito n magno numero, invenietur $x = 0.756\ nn$ proxime aliquanto major quam $\frac{1}{4} nn$ contra quam sentiebat Clarissimus Monmortius.

Casus Tertius.

Positis cæteris ut in primo casu, sit a ad b ratio inæqualitatis (*vid. Fig.* 1.) Pone $\frac{a^n + b^n}{\overline{a+b}|^n} = L$, $\frac{\overline{a-b}|^2}{\overline{a+b}|^2} = d$, $\frac{ab}{\overline{a+b}|^2} = r$, Fac, $1, 2r :: \frac{HBq}{AB}, m :: \frac{CKq}{AC}, p :: \frac{MDq}{AD}, q :: \frac{OEq}{AE}, s :: \frac{QFq}{AF}, t$.

Pone $Q = \frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x} - \frac{CK}{2rAC + d} p^{\frac{1}{2}x} + \frac{MD}{2rAD + d} q^{\frac{1}{2}x}$ &c. quo facto erit probabilitas ludi finiendi intra ludos non plures quam x ad probabilitatem non finiendi ut $nr^{\frac{1}{2}n-1} - 2LQ$ ad $2LQ$.

Corol-

Corollarium II.

Si sumatur pro Q Terminus primus $\frac{HB}{2rAB+d}$ $m^{\frac{1}{2}x}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio sufficiens.

Casus Quartus.

Positis cæteris ut iu secundo casu, sit a ad b ratio inæqualitatis (*vid. Fig.* 2.)

Pone quantitates L, $d, r, m, p, q, s, t,$ &c. ut in tertio casu.

Pone $Q = \frac{BH \times G\alpha}{2rAB+d} m^{\frac{x-1}{2}} - \frac{CK \times G\beta}{2rAC+d} p^{\frac{x-1}{2}} + \frac{DM \times G\gamma}{2rAD+d} q^{\frac{x-1}{2}}$ *&c.* quo facto erit probabilitas ludi finiendi intra ludos non plures quam x ad probabilitatem non finiendi ut $nr^{\frac{n-3}{2}} - 4LQ$ ad $4LQ$.

Corollarium.

Si sumatur pro Q Terminus unicus $\frac{BH \times G\alpha}{2rAB+d}$ $m^{\frac{x-1}{2}}$ neglectis cæteris habebitur approximatio sufficiens.

Quemadmodum in Progressione Geometricâ, Terminus quilibet ad proxime præcedentem habet rationem datam, ita sunt aliæ Progressiones quæ sic constitui possunt ut assumptis ad libitum Terminis duobus primis, Terminus quilibet subsequens ad duos proxime præcedentes habeat rationes datas, hujusmodi est subjecta Series, A B C D E F

$1 + 3x + 7xx + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5$, &c. in qua

$C = 2Bx + 1Axx$

$D = 2Cx + 1Bxx$

$E = 2Dx + 1Cxx$

$F = 2Ex + 1Dxx$ &c.

Quantitates autem Numerales $2 + 1$ *simul sumptas subque propriis signis connexas appellare licet Indicem Relationis.*

Eodem modo constitui possunt series aliæ in quibus assumptis ad libitum Terminis tribus primis, Terminus quilibet subsequens ad tres proxime præcedentes habeat rationes datas; hujus generis est subjecta Series.

A B C D E F

$1 + 2x + 3xx + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5$ &c. in qua

$D = 3Cx - 2Bxx + 5Ax^3$

$E = 3Dx - 2Cxx + 5Bx^3$

$F = 3Ex - 2Dxx + 5Cx^3$ &c.

Quantitates autem Numerales $3 - 2 + 5$ *simul sumptæ subque propriis signis connexæ, componunt Indicem Relationis.*

Sunt aliæ series in quibus Relatio sit ad quatuor, vel ad quinque, vel ad sex Terminos præcedentes, &c.

Series autem omnes hujus generis recurrentes appellare licebit propter Relationem Terminorum perpetuo recurrentem.

PROBLEMA II.

In seriebus recurrentibus, ex datis Terminis duobus primis, si relatio fiat ad duos præcedentes; vel datis

datis Terminis tribus primis, si relatio fiat ad tres præcedentes, &c. dato etiam indice relationis, invenire summam Terminorum quotlibet quorum numerus datus sit.

Problema solvitur in Tractatu nostro qui inscribitur, *The Doctrine of Chances.*

PROBLEMA III.

Assumptis ad libitum seriebus quotcunque recurrentibus; Terminisque, iisdem intervallis a principio serierum distantibus, in se invicem multiplicatis, invenire summam seriei ex hac multiplicatione resultantis.

INVESTIGATIO.

I° Proponantur series duæ, sitque $m + n$ Index Relationis in prima serie, atque $p + q$ Index Relationis in secunda, ex primo Indice $m + n$, formetur Æquatio $xx - mx - n = 0$, ex secundo Indice $p + q$, formetur Æquatio $yy - py - q = 0$, pone $xy = z$. Atque ope trium istarum Æquationum, expungantur x & y, & orietur Æquatio

$$z^4 - mpz^3 \begin{array}{l} -mmq \\ -npp \\ -2nq \end{array} zz - mnpqz + nnqq = 0.$$

in qua deleto primo termino z^4, mutatis signis omnibus, atque posito $z = 1$, obtinebitur Index Relationis, quo obtento, series resultans facile summabitur; II° eodem modo procedere licet, si dentur series tres vel quatuor &c. recurrentes.

Dum superiores paginæ prælo subjiciebantur, incidi fortuito in Acta Leipſ. *annorum* 1702 *&* 1703, *quibus comperi Cla.* Leibnitium *eadem fere methodo ante me usum fuisse qua hic utor in reducendis Fractionibus Algebraicis ad simpliciores, quod monitum velim ut a me avertam vel minimam suspicionem, aliena mihimet arrogare voluisse; Propositio autem qua id præstitimus æque ac Propositio nostra tertia, ambæ deducuntur tanquam Corollaria ex altera Propositione maxime generali quam exhibuimus coram Regali Societate,* Maii 5° 1720; *Propositio sic se habet.*

Data serie quâvis recurrente quarum Termini quotlibet primi ad libitum sumantur; dato etiam Indice Relationis Terminorum sequentium ad præcedentes, invenire Terminum quemlibet assignatum in hac serie, priusquam summa seriei sit cognita.

Qui autem rite perspexerit Solutionem Problematis hic adducti, is utique percipiet illam pendere a Propositione nostra generali, cujus demonstrationem simulque modum investigationis brevi spero publici juris faciam.
